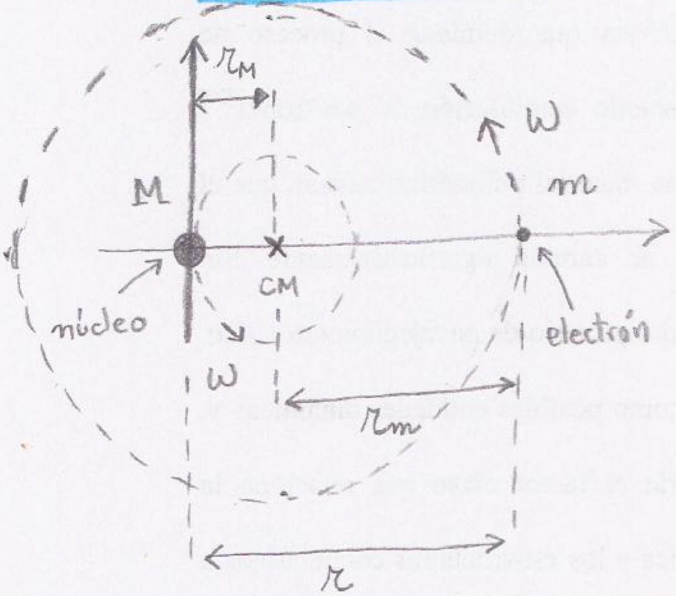
Corrección por masa nuclear finita



$$r_M + r_m = r \quad (1)$$

$$r_{CM} = \frac{0 \times M + m \times r}{M + m} = r_M \quad (2)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze^2}{r^2} = m\,\frac{v_m^2}{r_m} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze^2}{r^2} = M\,\frac{V_M^2}{r_M} \quad (4)$$

$$v_m = \omega\, r_m \quad (5) \qquad V_M = \omega\, r_M \quad (6)$$

$$m\,\frac{v_m^2}{r_m} + M\,\frac{V_M^2}{r_M} = \frac{m\,\omega^2 r_m^2}{r_m} + M\,\frac{\omega^2 r_M^2}{r_M} = \omega^2\left(m\, r_m + M\, r_M\right) \quad (6)$$

$$(2) \Rightarrow \quad r_{CM} = \frac{m r}{M+m} = r_M \quad (7)$$

$$(7) \text{ en } (1) \Rightarrow \quad r_m = r - r_M = r - \frac{m r}{M+m} = \frac{M r}{M+m} \quad (8)$$

(7) y (8) en (6) $\Rightarrow$

$$m\,\frac{v_m^2}{r_m} + M\,\frac{V_M^2}{r_M} = \omega^2\left(m\,\frac{M r}{M+m} + M\,\frac{m r}{M+m}\right) = 2\omega^2\,\frac{m M r}{M+m}$$

$$= 2\mu\,\omega^2 r \quad (9)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Ze^2}{r^2} = m\,\frac{v_m^2}{r_m} + M\,\frac{V_M^2}{r_M} = 2\mu\,\omega^2 r$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze^2}{r^2} = \mu\,\omega^2 r} \quad (10) \quad \left(1^{er} \text{ postulado de Bohr}\right)$$

Momento angular del sistema respecto a CM

$$\Rightarrow \quad L = r_m\, p_m + r_M\, p_M = r_m\, m\, v_m + r_M\, M\, v_M$$

$$= r_m\, m\, r_m\, \omega + r_M\, M\, r_M\, \omega$$

$$= (m\, r_m^2 + M\, r_M^2)\,\omega \qquad (11)$$

(7) y (8) en (11)

$$L = \left(m \left(\frac{M r}{M+m}\right)^2 + M \left(\frac{m r}{M+m}\right)^2 \right)\omega$$

$$= \left(m \frac{M^2 r^2}{(M+m)^2} + M \frac{m^2 r^2}{(M+m)^2} \right)\omega$$

$$= mM \left(\frac{M r^2}{(M+m)^2} + \frac{m r^2}{(M+m)^2} \right)\omega$$

$$\boxed{L = \frac{mM}{M+m}\, r^2\, \omega = \mu r^2 \omega} \qquad (12)$$

2do postulado de Bohr $\Rightarrow$ $\boxed{L = n\hbar}$ (13)

$$(12) \text{ y } (13) \Rightarrow \mu r^2 \omega = n\hbar \Rightarrow \omega = \frac{n\hbar}{\mu r^2} \qquad (14)$$

$$(14) \text{ en } (10) \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = \mu \left(\frac{n\hbar}{\mu r^2}\right)^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = \mu \frac{n^2 \hbar^2}{\mu^2 r^4}\, r \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Ze^2 = \frac{n^2\hbar^2}{\mu r}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \left(4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{Ze^2\mu}\right) n^2} \qquad (15)$$

$$(14) \Rightarrow \omega r = \frac{n\hbar}{\mu r} \qquad (16)$$

$$(15) \text{ en } (16) \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{\mu} \frac{Ze^2 \mu}{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0 n^2}$$

$$\boxed{v = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad (17)$$

La energía total es $E = K + U$ (18)

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \qquad (19)$$

$$K = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 \qquad (20)$$

$$= \frac{1}{2} m r_m^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M r_M^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m r_m^2 + M r_M^2\right)\omega^2$$

Como $r_m = \dfrac{Mr}{M+m}$ y $r_M = \dfrac{mr}{M+m}$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\omega^2\left(m \frac{M^2 r^2}{(M+m)^2} + M\frac{m^2 r^2}{(M+m)^2}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{mM}{m+M}\left(\frac{M+m}{M+m}\right) r^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2} \qquad (21)$$

$$(10) \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \mu\omega^2 r^2$$

$$\Rightarrow -U = +\mu\omega^2 r^2 = +2K \Rightarrow \boxed{U = -2K}$$

$$\Rightarrow E = K + U = K - 2K \Rightarrow \boxed{E = -K = -\frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2} \quad (22$$

Como $\quad v = \omega r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$E = -\frac{1}{2}\mu(\omega r)^2 = -\frac{1}{2}\mu\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{\mu(Ze^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \qquad (23)$$

4to Postulado de Bohr $\Rightarrow \boxed{h\nu = E_i - E_f}$ $\qquad (24)$

$$h\frac{c}{\lambda} = E_i - E_f \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_i - E_f}{hc} = \frac{E_i - E_f}{2\pi\hbar c}$$

Espectro de emisión $\Rightarrow E_i > E_f \Rightarrow n_i > n_f$

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{e^4\mu Z^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\pi\hbar^3 c}}_{R_M}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad (25)$$

R_M = constante de Rydberg para un núcleo de masa finita M

Como $\quad \mu = \frac{mM}{m+M} \qquad (26)$

Cuando M es infinitamente pesado, $\mu = m$. En ese caso

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{M\to\infty} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{e^4 m}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\pi\hbar^3 c}}_{R_\infty} Z^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad (27)$$

R_∞ = constante de Rydberg

Comparando (25) y (27) $\Rightarrow R_M = \frac{M}{m+M}R_\infty = \frac{\mu}{m}R_\infty \qquad (28$

Ecuación 4.22 pag. 137, Eisberg - Resnick

Ejemplo

¿Cómo se comparan las frecuencias de los fotones emitidos por el positronio ("átomo" que está formado por un positrón y un electrón que se mueven alrededor de su centro de masa) y las frecuencias de los fotones emitidos por el átomo de hidrógeno?

Para el átomo de hidrógeno, como la masa de su núcleo M es aproximadamente 2000 veces la masa del electrón m, es razonable asumir que el núcleo del hidrógeno tiene una masa $M \to \infty$ (relativa a la masa m del electrón). Por lo tanto, para el átomo de hidrógeno se cumple la ecuación (27) (con $Z = 1$)

Para el "átomo" (existe por muy poco tiempo) de positronio la masa del núcleo M es igual a la del electrón m. De esta forma: la masa del núcleo no puede asumirse como infinita (relativa a la del electrón) y la masa reducida μ del positronio viene dada entonces por

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m\,m}{2m} = \frac{m}{2} \quad (29)$$

Para el positronio se cumple la ecuación (25).

A partir de estos argumentos

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{\text{Hidrógeno}} = R_{\infty}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \quad (29)$$

y

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{\text{positronio}} = R_M\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \quad (30)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\nu_{\text{positronio}}}{\nu_{\text{Hidrógeno}}} = \frac{\left(\frac{c}{\lambda}\right)_{\text{positronio}}}{\left(\frac{c}{\lambda}\right)_{\text{Hidrógeno}}} = \frac{R_M}{R_{\infty}} \quad (31)$$

De (28) $\Rightarrow$ $\dfrac{R_M}{R_{\infty}} = \dfrac{\mu}{m} = \dfrac{m/2}{m} = \dfrac{1}{2}$ (32)

(31) y (32) $\Rightarrow$ $\dfrac{\nu_{\text{positronio}}}{\nu_{\text{Hidrógeno}}} = \dfrac{1}{2}$ (33)

✓ Las frecuencias de las líneas espectrales emitidas por el positronio son la mitad de las emitidas por el átomo de hidrógeno.

✓ Como $\nu = \frac{c}{\lambda}$, entonces las longitudes de ondas de los fotones emitidos por el positronio son el doble de las longitudes de onda de los emitidos por el hidrógeno.

✓ ¿Cómo se comparan las energías del positronio con las del hidrógeno? ¿Y los radios de las orbitas permitidas? ¿Y las velocidades? (Preguntas para el estudiante)

Leer Ejemplos 4.8, 4.9 y 4.10 pag. 137, Eisberg-Resnick